Capítulo 2. Aritmética

Una lección que Sócrates nos dio es que, debemos confiar en la razón.
Al mismo tiempo nos alertó sobre el peligro del dogmatismo….
En pocas palabras nos enseñó que el espíritu de la ciencia es la crítica.
Karl R. Popper.

2.0 Introducción. El nombre *Aritmética* (de la palabra griega Αριθμητικά y ésta de $\alpha\rho\iota\theta\mu o\varsigma$ que significa número), estuvo asociado desde tiempos de la escuela pitagórica (siglos VI-III antes de Cristo (AC)), al estudio de las propiedades de los números naturales, 1, 2, 3,…. La aritmética jugó un papel crucial en la filosofía, y no sólo en el pitagorismo, sino que alcanzó las ligas mayores, donde jugaban rol importante, filósofos, tan reconocidos como Platón y Aristóteles. A la *Aritmética* que nos referiremos aquí, es entonces, a la teoría de números, y no a la otra, a la de las técnicas computacionales, o aquella de las cuentas del mercado, conocida por los pitagóricos como *Logística* (λογιστις).

El origen de la teoría de números va más allá de la cultura griega. Hasta mediados del siglo XX se creía que los inicios de la teoría de números y el algebra se remontaban a las culturas mesopotámicas del segundo milenio (AC), en razón, sobre todo, a evidencias mostradas por Otto Neugebauer (1899-1990) y Alfred Sachs (1914-) en su obra *Mathematical Cuneiform Texts*[1]. Sin embargo investigaciones más recientes, descritas en la obra de B. L. van der Waerden (1903-1998) [2] tienden a mostrar que la teoría de números tuvo un origen anterior, probablemente en el período neolítico entre 3000 y 2500 AC en Europa Central y de allí, este conocimiento matemático se expandió a Gran Bretaña, el Cercano Este, Mesopotamia, India y China. Dicho sea de paso, van der Waerden fue el primer discípulo que tuvo Neugebauer en historia de las matemáticas, cuando en la Universidad de Gotinga, se inauguró esta cátedra en 1927.

Los números naturales están presentes en la filosofía pitagórica, desempeñando un papel fundamental en la explicación de la esencia de todas las cosas, como se explicará más adelante. Durante el apogeo de la cultura griega, la teoría de números estaría presente en los monumentales trabajos de Euclides, de Arquímedes y de Diofanto de Alejandría. El *teorema fundamental de la aritmética*, que aparece en las matemáticas griegas, es a no dudarlo un hito en el desarrollo de la teoría de números. Este teorema da una caracterización de los números naturales, como producto de números primos en forma única, salvo el orden de los factores. La aparición de los números primos jugando un papel importante en la obra de Euclides contrasta con el desarrollo matemático egipcio, inclinado más, a representar los números, como suma de fracciones de numerador uno y las matemáticas babilonias usando fracciones sexagesimales con el mismo propósito.

A la escuela pitagórica se le atribuye el descubrimiento ciertos números con características especiales simulando, en ciertos casos, atributos propios del ser humano. Algunos ejemplos son los siguientes:
Números Perfectos son aquellos para los cuales la suma de sus divisores propios[3] reproduce el mismo número. Por ejemplo: **6 = 1 + 2 + 3,** donde 1, 2 y 3 son los divisares propios de 6.

---

[1] Neugebauer, O. et al, *Mathematical Cuneiform Texts.* New Haven, Conn. 1945.
[2] Van der Waerden. B. L. *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Springer-Verlag. Berlin. 1983.
[3] Se denomina divisor propio de un número a aquel que lo divide, pero menor que él, por ejemplo 1 es divisor propio de 6, pero 6 no es divisor propio de 6.

Números Amigos son parejas de números naturales con la propiedad de que la suma de los divisores propios de cada uno, reproduce al otro. Un ejemplo es el par **(220, 284)**, porque los divisores propios de 220 son: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 y 110, cuya suma es 284, y así mismo, los divisores propios de 284 son: 1, 2, 4, 71 y 142, que al sumarlos da 220.

Para los pitagóricos el número uno, la *monada*, tenía un estatus especial. Más que un número, era considerado como el divino generador absoluto de todo, incluyendo de los números. El dos estaba asociado a la recta y así, a la primera dimensión, por cuanto dos puntos distintos determinan una recta. El número tres se ligó con el triángulo, porque tres puntos distintos, no todos colineales, determinan un triángulo y aquí ya se distinguen dos dimensiones. Finalmente el cuatro representaba al tetraedro, porque con cuatro puntos distintos, no todos en el mismo plano, se puede determinar un tetraedro y allí están implícitas las tres dimensiones. La suma **1 + 2 + 3 + 4 = 10**, conformó lo que para ellos fue el *tetractys:* número y concepto muy importantes dentro de su filosofía, ya que en él, se compendia el espacio y la *mónada*: la generatriz de todo ser.

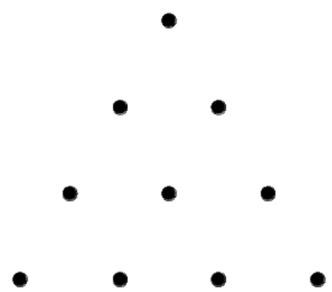


Fig. 2.1. Representación gráfica del *Tetractys* como un arreglo triangular, donde el número uno (*la monada*) ocupa el vértice superior y el cuatro, la base del triángulo equilátero. La primera fila representa el punto (sin dimensión), La segunda, la recta (dimensión uno). La tercera el plano (dimensión dos) y la cuarta fila, el espacio (dimensión tres).

Para los pitagóricos, el tetractys también simbolizó su cosmogonía, en el sentido de que allí se concentra el origen de todo ser, como una combinación de los cuatro elementos: tierra, agua, fuego y aire.

La importancia que se le dio al tetractys se ve reflejada en la siguiente oración de la cofradía o hermandad de los pitagóricos, de la cual desconocemos su origen:

> "¡Bendícenos divino número, tu que has generado al hombre y a sus dioses! ¡Oh divino, divino Tetractys, tu que contienes la raíz y la fuente del flujo eterno de la creación! ¡Por ti divino número empieza la unidad pura y profunda que culmina en el sagrado cuatro; entonces se engendra la madre de todo, el origen del universo, la que todo lo contiene y lo enlaza, la primitiva esencia, la que nunca se desvía, la inagotable y sagrada *decena*, la clave de todo ser!".

En este corto texto se concentra la filosofía de los pitagóricos. En esta filosofía se asigna al número natural gran importancia, como origen y esencia de todos los seres.

Temas relacionados con teoría de números, como números perfectos, por ejemplo, se ponen de moda de cuando en vez. Así lo resalta André Weil en su libro de teoría de números[4], mostrando cómo Pierre de Fermat (1601-1665) y sus amigos epistolares, incluyendo Pascal, Descartes y Mersenne, se ocuparon de estos temas. Igual ocurrió en los años posteriores a la invención del

[4] Weil, A. *Number Theory. An approach through history. From Hammurabi to Legendre.* Birkhäuser. Boston. 1983.

computador, cuando las máquinas se dedicaron a encontrar números perfectos cada vez mayores. El interés en los números perfectos radica en el hecho de que con cada número perfecto[5] está asociado un número primo y así: encontrar un nuevo número perfecto es también hallar un número primo nuevo. En el algebra geométrica también los pitagóricos nos dejaron una herencia muy rica, con los números geométricos y con las fórmulas recursivas para calcular la suma de los pares, los impares, los cuadrados, etc. Para conocer un poco más de estos temas, sugiero ver mis notas de historia de las matemáticas[6].

2. 1 El concepto de igualdad.

Las matemáticas a las que hoy tenemos acceso, con sus métodos y su simbología, tienen poco en común con las matemáticas que conocieron y trabajaron Platón, y sus contemporáneos cultos de la antigua *Hélade*[7]. Empezando por los símbolos; la igualdad, por ejemplo, hoy la representamos por "="; sin embargo, este símbolo, sólo aparece en imprenta en 1557, introducido por Robert Recorde (*ca*. 1510-1558) en un álgebra titulada *The Whetstone of Witte (La Piedra de Toque de la Sabiduría)*, donde la única justificación para escogerlo es, según sus propias palabras: "porque no otras dos cosas pueden ser tan iguales".

Gottfried Leibniz (1646-1716) en el libro *De Arte Combinatoria*, hace de la igualdad de conceptos un objeto de estudio y de análisis. Entre las propiedades que se desprenden de sus estudios están las siguientes:

REFLEXIVIDAD. Si **A** es un concepto, entonces **A = A.**
SIMETRIA. Para conceptos **A** y **B**, si **A = B,** entonces **B = A.**
TRANSITIVIDAD. Para conceptos **A, B** y **C**, si **A = B** y **B = C,** entonces **A = C.**

Una relación como la igualdad, con estas propiedades, la denominamos hoy, *relación de equivalencia*. Pero la igualdad no es la única que satisface estas propiedades. Relaciones de este tipo son muy importantes en matemáticas. El álgebra moderna tiene como capítulo importante, las relaciones de equivalencia que van a dar origen a las clases residuales y por ende a ejemplos de ciertas estructuras algebraicas llamadas grupos.

Euclides en los Elementos, y Aristóteles en la lógica tratan este tipo de conceptos. Por ejemplo ambos están de acuerdo en aceptar que dos cosas iguales a una tercera son iguales entre si, lo que corresponde a la propiedad transitiva de la igualdad mencionada arriba. El primer ejemplo de una relación de equivalencia en la geometría es la congruencia de figuras planas. Algunos silogismos como los interpreta Aristóteles son consecuencia de la transitividad de conjuntos. Por ejemplo, el silogismo:

M: *Todo hombre es mortal* (MAYOR)
H: *Sócrates es hombre* (MENOR)

S: *Sócrates es mortal* (CONCLUSION)

---

[5] Euclides propuso una forma simple para encontrar números perfectos pares: sumar las potencias de dos empezando con 1 hasta que la suma dé un número primo; este resultado se multiplica por el último sumando para encontrar un número perfecto.
[6] Pareja-Heredia, D. *Temas de Historia de las Matemáticas*. Biblioteca Universidad del Quindío. Armenia. 1979.
[7] El nombre de Hélade lo usamos aquí para designar la antigua Grecia que abarcaba cultural y geográficamente buena parte de las costas del Mediterráneo desde las costas de la actual Turquía hasta el estrecho de Gibraltar incluyendo el norte de África y el sur de la bota italiana. Su nombre en griego es: Ελλάδα o Ελλάς, de donde deriva el nombre oficial de la actual Grecia, *República Helénica.*

Puede interpretarse como el diagrama de Euler en la fig. 2.2. Aquí se ve que $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{H} \subseteq \mathbf{M}$ y consecuentemente $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{M}$.

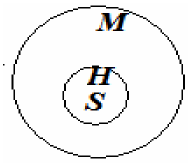


Fig. 2.2. Representación de un silogismo como un diagrama de Euler.

Si aceptamos en la geometría de Euclides que una recta es paralela a si misma, entonces el concepto de paralelismo es una relación de equivalencia. Esta relación particiona el conjunto de todas las rectas, en clases de rectas que tienen en común el hecho de ser paralelas a una recta dada. En *geometría proyectiva* el punto donde las rectas paralelas se encuentran se denomina el punto en el infinito. El conjunto de todos los puntos en el infinito se llama la *recta en el infinito*.

2.2. Observaciones sobre la Escuela Pitagórica

Pitágoras de Samos (siglo VI A. C.) y su escuela Pitagórica (Siglos VI - III AC) contribuyeron con mucho, al desarrollo de las matemáticas. Su concepción filosófica, como dijimos antes, tenía por base al número natural. Para los pitagóricos todo era número. A la misma geometría intentaron aritmetizarla, asociando números a las figuras geométricas. Fue el caso, verbigracia, con los números triangulares asociados a los triángulos, los números cuadrados a los cuadrados geométricos, los números pentagonales a los pentágonos, etc. A los triángulos rectángulos les asociaron triplas como (3, 4, 5), (5, 12, 13), donde los números representan las longitudes de los lados del triángulo. Aunque el teorema que lleva el nombre de Pitágoras era ya un resultado conocido en Babilonia, un milenio antes de que naciera Pitágoras, posiblemente a él debamos una prueba razonable para el mismo. A este filósofo y matemático griego, deberíamos recordarlo, más que por el famoso teorema, por el hecho de ser uno de los primeros pensadores que se preocupó por la búsqueda de un orden en el conocimiento abstracto, y sobre todo como el filósofo, que expuso razones que explicaran, usando el concepto de número, la esencia de todas las cosas.

Pitágoras fue heredero de la cultura científica jónica[8] liderada por Tales de Mileto, uno de los siete sabios de la antigua Grecia, que vivió alrededor del siglo VI AC. Otros miembros destacados de la escuela jónica fueron Anaximandro, Anaxímenes y Heráclito. Pitágoras se autollamaba "filósofo", o sea, amante de la sabiduría, y en efecto él, entre otros, estuvo tras la busca de patrones abstractos y de un orden cosmológico que diera respuesta a las múltiples preguntas que su curiosidad intelectual le formulaba.

El teorema de Pitágoras, muestran todas las características del conocimiento matemático: *Abstracción, Precisión, Certeza y Permanencia.* Las matemáticas creadas por Pitágoras y los antiguos griegos, han servido de modelo para la búsqueda de nuevos conocimientos y para ir cimentando la acumulación de los mismos en forma razonada, con argumentaciones que rebasen, los ejemplos particulares. La cosmología griega va más allá del mundo que nos rodea, del movimiento planetario, de la predicción y análisis de los fenómenos naturales, pues toca también, los patrones de pensamiento y el lenguaje con el que razonamos y pensamos. ¿Qué hizo Pitágoras para que su famoso teorema tuviera la solidez y certeza que lo ha caracterizado? Uno

[8] Jonia corresponde a una parte de las costas de la actual Turquía que linda con el Mediterráneo y donde estaban ciudades tan importantes como Mileto, Pérgamo, Éfeso, Samos, Perga y Rodas.

respondería ahora que su certeza está en la prueba, o sea, en la cadena argumentativa, que por medios lógicos desemboca en la conclusión del teorema. El gran mérito de Tales, Pitágoras y demás matemáticos griegos, no es tanto haber descubierto y formulado resultados, sino haber asociado a los mismos, una prueba que los sustente. Esta tradición argumentativa se inicia con Tales a quien se le atribuye un buen número de teoremas y sus demostraciones, que aparecerán luego en la obra "*Elementos*" de Euclides[9].

Como mencionamos, el llamado teorema de Pitágoras se conocía en tiempos de Babilonia, como lo muestra una tablilla de arcilla (del período 1900-1600 AC) que en caracteres cuneiformes exhibe triplas pitagóricas que satisfacen la relación $\mathbf{x^2 + y^2 = z^2}$. Esta tablilla tiene el número 322 en la colección Plimpton[10] del museo de la Universidad de Columbia en Nueva York. De los griegos heredamos los métodos de prueba y con ellos el patrón argumentativo usado en el llamado *método matemático*. El método matemático se puede sintetizar en el proceso lineal siguiente:

Observación – Abstracción – Apropiación – Descripción – Prueba

La teoría de números o aritmética, tuvo su época de oro en tiempos de los pitagóricos. Los pitagóricos construían las tablas de sumar y multiplicar pero sólo enseñaban a manejarlas; no ha construirlas. Iniciaron el estudio del sonido, particularmente lo relativo a cuerdas vibrantes, asociando la longitud de la cuerda con su altura sonora. Encontraron que la armonía del sonido, depende de las relaciones numéricas asociadas a las longitudes de las cuerdas vibrantes. En astronomía llegaron a sustentar la esfericidad de la tierra. El conocimiento que tuvieron en matemáticas, se puede equiparar al contenido de los libros I, II, III, IV, y VI de *Los Elementos* de Euclides, más, lo que representa el álgebra geométrica, que es un conjunto muy interesante de propiedades que se desprenden de las figuras geométricas. Estudiaron los números primos, los números perfectos y llegaron hasta asociar a los números cualidades humanas, como decíamos antes. Este es el caso de los números amigos, que como la pareja (220, 284) se usó para representar la amistad.

La *logística* (aritmética elemental), siempre fue considerada por los griegos, una disciplina de bajo perfil. Tal vez por eso, no desarrollaron un sistema numérico que facilitara las operaciones y que agilizara el cálculo numérico. En el tiempo de los pitagóricos se usó el sistema jónico de numeración. Era un sistema decimal aditivo donde los números se representaban con las letras del alfabeto, adicionadas de tres símbolos tomados del antiguo alfabeto fenicio. En ese sistema a cada palabra se le asociaba un número. Por ejemplo, a la palabra ***logos*** **(*λογοσ*)** se le asoció el número 373, porque en su numeración, las letras griegas correspondientes: $\lambda = 30$, $o = 70$, $\gamma = 3$, $o = 70$ y $\sigma = 200$, dan como suma el número 373.

2.3. Sobre el concepto de *Logos.*

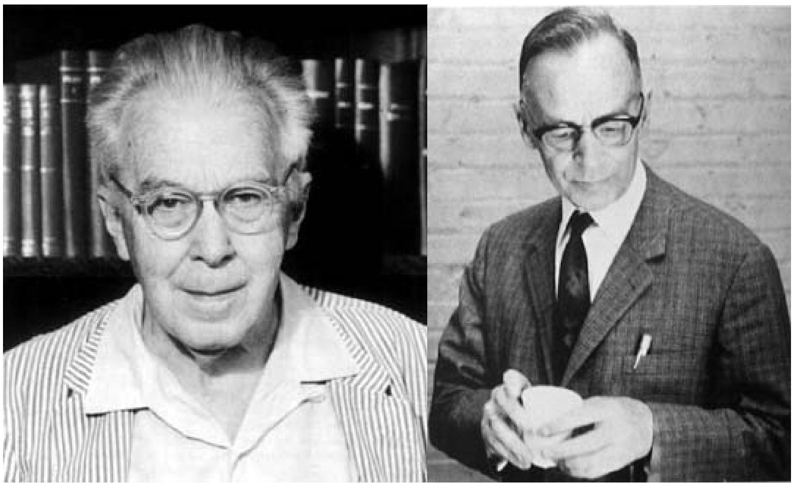
El término "logos" es de aparición frecuente en las lenguas occidentales que derivan del griego o del latín, o están emparentadas con éstas. Ese es el caso del español, el inglés, el alemán y las lenguas eslavas, por ejemplo. Como sufijo, significa estudio, tratado; verbigracia en las palabras: *metodología, astrología, oftalmología, epistemología*, etc. También lo encontramos como prefijo en *logotipo, logaritmo, lógica, logística*, etc. Al latín se tradujo como *ratio* (razón), con muchas otras acepciones, entre ellas, *rata* (rata de interés, proporción), *cálculo, cuenta, tomar en consideración, disposición, plan,* ***razón*** (cociente de números), *razón, juicio, causa, teoría,*

[9] Para un estudio de los Elementos en su parte inicial ver el capítulo 3 de estas notas.
[10] Ver página 9 de la obra de Weil citada arriba y la página 2 de la obra de van der Waerden ya también citada.

doctrina, y muchas otras. Pero la cadena sigue pues de estas acepciones se derivan otras muy importantes como por ejemplo: racional, razonamiento, causalidad, etc. El termino λογοσ- (plural, λογοί), en griego significa, ***razón**, idea, conocimiento.*

Recordemos que Pitágoras era *jonio* (oriundo de Asia Menor) y compartía rasgos culturales con Tales de Mileto y Heráclito de Éfeso. Heráclito basaba su filosofía en el cambio y el movimiento y para Pitágoras la esencia de todo estaba en el número. Esa esencia que identifica al ser, es lo inmutable, lo que se preserva, en y después del cambio. Popper[11] sugiere que el "logos", al que se refiere Heráclito, podría ser la ley del cambio, la causa del equilibrio de las cosas, la medida, la regla, el cambio sujeto a ley. Pero la medida es un número y la ley se enmarca en un sentido numérico y así partiendo de Heráclito llegamos a Pitágoras en cuanto al origen del logos.

Como dijimos, para los pitagóricos la geometría podía aritmetizarse. Partiendo de la *mónada* (unidad), extendiéndose a los números naturales y a sus λογοί, es decir, sus proporciones racionales, del tipo ***a/b***, donde ***a*** y ***b*** son números naturales, creían posible *logizar* (metrizar*)*, digámoslo así, el conjunto de todos los pares de segmentos. Su programa filosófico, sin embargo, colapsó, cuando descubrieron que, dos segmentos muy familiares en la geometría, como son, el lado y la diagonal del cuadrado, no permitían tal asociación. Aquí aparece uno de los grandes problemas que los pitagóricos no pudieron resolver y que a la postre, daría origen a una nueva clase de números, *los irracionales*; aquellos números, no expresables como cocientes de números naturales.



A la izquierda una foto de Otto Neugebauer, tomada de Internet, de alrededor de los años cincuenta del siglo pasado. Neugebauer dedicó gran parte de su vida a la historia de las matemáticas. Contemporáneo de Wittgenstein y de Richard Courant de quien fue su discípulo y colega en Gotinga, por razones de persecución a los judíos en la Alemania Nazi, debió refugiarse en Estados Unidos, donde desarrolló toda su vida académica como profesor de la Universidad de Brown y del Instituto de Estudios Avanzados de la Universidad de Princeton. Su producción en la historia de la astronomía matemática se constituye en su mayor legado, junto a la creación del *Zentralblatt für Mathematik* y de *The Mathematical Reviews,* las revistas mas importantes del mundo en lo relacionado con la reseña de la producción matemática universal. A la derecha una foto de Bartel L. van der Waerden tomada por Paul R. Halmos. Van der Waerden fue el primer alumno de Neugebauer en historia de las matemáticas en la Universidad de Gotinga. Su amplio espectro en el conocimiento matemático, le permitió destacarse en muchas ramas de las matemáticas incluyendo algebra, topología, análisis, teoría de probabilidades. Sus obras en historia de las matemáticas han sido referenciadas en estas notas. Su obra *Algebra* recopila en parte la obra algebraica de Emil Artin y Emmy Noether en relación con el algebra moderna. Este libro fue prácticamente el primer texto de algebra moderna que apareció en los años treinta del siglo pasado.

Siguiente Sección: ***El Problema de la Inconmensurabilidad.***

[11] POPPER, K. R. *La sociedad abierta y sus enemigos*. Ediciones Paidós. Barcelona. 1994. Página 206 y sgts.